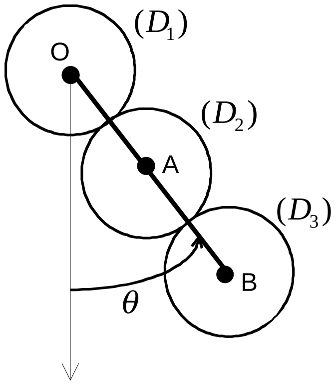
-EXERCICE 17.4-

• ENONCE :

« 3 disques et une tige »



OB est une tige de masse M et de longueur 4L, pouvant tourner sans frottements autour d'un axe horizontal passant par le point O.
On considère 3 disques de rayon L et de masse m; celui de centre O est **fixe**; les 2 autres sont articulés autour de 2 axes passant par les points A et B de la tige : ils tournent librement autour de ces axes.
Les 3 disques sont au contact, et l'on suppose qu'il y a **roulement sans glissement** d'un disque sur l'autre.

• L'ensemble reste dans un même plan vertical, et l'on donne les moments d'inertie suivants :

♦ pour la tige, par rapport à O : $J = \dfrac{16ML^2}{3}$

♦ pour les disques, par rapport à leur centre : $I = \dfrac{mL^2}{2}$

• Etudier le mouvement du système ($-\pi/2 \prec \theta \prec \pi/2$) ; on s'intéressera en particulier aux petites oscillations.

• **CORRIGE** :

« 3 disques et une tige »

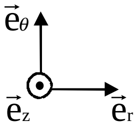
• **Analyse du problème :** à priori, il y a 3 degrés de liberté : l'angle de rotation de la tige (θ), celui du disque (D_2), que l'on notera θ_2, et celui du disque (D_3), noté θ_3. Le roulement sans glissement de (D_2) sur (D_1), au point de contact appelé I, et celui de (D_3) sur (D_2), au point de contact J, fourniront 2 **relations supplémentaires** : il n'y a donc **qu'un seul degré de liberté**, et nous pourrons nous contenter d'un théorème **énergétique**.

Le système choisi est l'ensemble {tige+2 disques mobiles}, le référentiel est le disque (D_1) ; il ne constitue pas un solide, il faut donc considérer également les forces **intérieures**. Les liaisons en O, A et B sont sans frottements ⇒ pas de puissance dissipée ; puisqu'il y a roulement sans glissement en I et J, la puissance **totale** des actions de contact en I et J est **nulle** (il y a bien des frottements, pour que ça « roule », mais la vitesse de glissement étant nulle, la résultante des actions de contact ne travaille pas) : nous utiliserons donc la **conservation de l'énergie mécanique**, en considérant l'énergie cinétique et potentielle des différentes parties du système.

• **Résolution du problème :**

♦ Roulement sans glissement :

∗ $\vec{v}_{I_2 \in D_2} = \vec{v}_{I_1 \in D_1} = \vec{0} = \vec{v}_A + \overrightarrow{I_2A} \wedge \vec{\omega}_2$, où $\vec{\omega}_2$ est le vecteur rotation instantanée du disque (D_2).



Nous prendrons une base cylindrique liée à la tige, le sens plus des rotations sera ainsi le sens trigonométrique.
Les points A et B effectuent un mouvement circulaire, leur vitesse est donc **orthoradiale**.

Il vient alors : $\vec{0} = 2L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + L\omega_2\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = (2L\dot{\theta} - L\omega_2)\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = 2\dot{\theta}}$

∗ $\vec{v}_{J_2 \in D_2} = \vec{v}_{J_3 \in D_3} \Rightarrow \vec{v}_A + \overrightarrow{J_2A} \wedge \vec{\omega}_2 = \vec{v}_B + \overrightarrow{J_3B} \wedge \vec{\omega}_3$, où $\vec{\omega}_3$ est le vecteur rotation du disque (D_3).

On a : $2L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + L\omega_2(-\vec{e}_r) \wedge \vec{e}_z = 4L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + L\omega_3\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z \Rightarrow \omega_3\vec{e}_\theta = (2\dot{\theta} + \omega_2 - 4\dot{\theta})\vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\omega_3 = 0}$

Rq : le résultat précédent peut sembler surprenant, mais plausible : lorsque la tige tourne avec une vitesse $\dot{\theta} \succ 0$, le disque tourne autour de l'axe passant par B dans le sens contraire ⇒ il est possible que dans le référentiel d'étude, $\omega_3 = 0$; le disque (D_3) est donc en **translation circulaire**, résultat dont nous nous servirons pour calculer simplement son énergie cinétique.

♦ Calcul de l'énergie potentielle :

∗ ***tige*** **:** $E_{P_{tige}} = Mg \times 2L(1 - \cos\theta)$, en prenant l'origine des potentiels lorsque la tige est verticale.

Rq : choisir une constante est bien moins important que de veiller à ce que E_P augmente lorsqu'on s'élève dans le champ de pesanteur ; ici, la tige s'élève pour $\theta \nearrow \Rightarrow \cos\theta \searrow \Rightarrow -\cos\theta \nearrow$, ce qui est correct.

∗ ***disques*** **:** de la même manière : $E_{P_{disques}} = mg \times 2L(1 - \cos\theta) + mg \times 4L(1 - \cos\theta) \Rightarrow$

$$\boxed{E_{P_{Tot}} = 2Lg(M + 3m)(1 - \cos\theta)}$$

♦ Calcul de l'énergie cinétique :

∗ ***tige* :** $E_{C_{tige}} = \frac{1}{2}J(\dot{\theta})^2 = \frac{8}{3}ML^2(\dot{\theta})^2$

∗ ***disque*** (D_2) **:** appliquons le théorème de König concernant l'énergie cinétique :

$$E_C(D_1) = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\times\frac{mL^2}{2}\times(2\dot{\theta})^2 = 3mL^2(\dot{\theta})^2$$

∗ ***disque*** (D_3) **:** $E_C(D_3) = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m(4L\dot{\theta})^2 = 8mL^2(\dot{\theta})^2 \Rightarrow \boxed{E_{C_{Tot}} = \left(\frac{8M}{3} + 11m\right)L^2(\dot{\theta})^2}$

• L'énergie mécanique a donc pour expression :

$$E_M = E_P + E_C = E_{C_{Tot}} = E_{P_{Tot}} = 2Lg(M+3m)(1-\cos\theta) + \left(\frac{8M}{3} + 11m\right)L^2(\dot{\theta})^2 = cste\,.$$

Après dérivation temporelle et simplification par $2L\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}=0$ correspond à une situation statique) :

$$\boxed{g(M+3m)\sin\theta + \left(\frac{8M}{3} + 11m\right)L\ddot{\theta} = 0}$$

Rq : cette équation n'est pas linéaire et n'a pas de solution analytique.

• Pour de petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$, ce qui permet d'écrire :

$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{M+3m}{\frac{8M}{3}+11m}\right)\frac{g}{L}\times\theta = 0}$ $\Rightarrow$ les oscillations sont **harmoniques** de la forme :

$\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$ avec pour pulsation : $\boxed{\omega = \sqrt{\left(\frac{M+3m}{\frac{8M}{3}+11m}\right)\frac{g}{L}}}$